Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato V

DOCENTE: PROF. PIERPAOLO ESPOSITO

TUTORI: A. MAZZOCCOLI, M. NANNI

SOLUZIONI

<u>ESERCIZIO 1.</u> Calcolare i seguenti limiti notevoli.

$$\circ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{2n\cdot\frac{7}{7}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{7}{n}\right)^{\frac{n}{7}\cdot 14}=e^{14}.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!\cdot\frac{n^n}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n^n\cdot\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{n!}{n^n}}=1.$$

$$\circ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n^n\cdot\frac{n!}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{n^n}{n!}}=+\infty.$$

<u>ESERCIZIO 2.</u> Discutere la convergenza delle seguenti serie utilizzando il criterio del confronto con la serie geometrica.

$$\bullet\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}}{3^n}\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n<+\infty.$$

Questo perché $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\to_n e$ ed è monotòna crescente. Dunque dal confronto con la serie geometrica di ragione $\frac{e}{3}<1$, la nostra serie converge.

$$\bullet\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{n^3+n}{n^3}\right)^{4n^3}}{e^n}$$

Osserviamo che la serie non soddisfa neanche la condizione necessaria per la convergenza, cioè $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{n^3+n}{n^3}\right)^{4n^3}}{e^n}\neq 0$. D'altra parte per n grandi $\frac{\left(\frac{n^3+n}{n^3}\right)^{4n^3}}{e^n}$ si comporta come $\frac{e^{4n}}{e^n}=e^{3n}$, serie geometrica di ragione maggiore di 1. Per queste ragioni, la nostra serie diverge.

$$\bullet\sum_{n=1}^{+\infty}(\sin(\sin(n!\log n)))^n :$$

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad|\sin(n!\log n)|\leq 1<\frac{\pi}{2}\Rightarrow|\sin(\sin(n!\log n))|\leq(\sin 1)^n$$

Ora, poiché $\sin 1<1$, la serie geometrica di ragione $\sin 1$ converge; per il criterio del confronto dunque convergerà anche la nostra serie.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Discutere al variare del parametro $\alpha>0$ la convergenza delle seguenti serie:

$$\bullet\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{2+\alpha}\right)^n<+\infty\Leftrightarrow\frac{5}{2+\alpha}<1\Leftrightarrow\frac{3-\alpha}{2+\alpha}<0\Leftrightarrow\alpha>3.$$

$$\bullet\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+\alpha}{n+\alpha}\right)^n$$

Per n sufficientemente grandi avremo $\dfrac{1+\alpha}{n+\alpha} \leq \dfrac{1}{2}$ da cui $\left(\dfrac{1+\alpha}{n+\alpha}\right)^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Dal confronto con la serie geometrica segue che la nostra serie converge $\forall \alpha > 0$.

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} |\log\alpha|^n < +\infty \Leftrightarrow |\log\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < \log\alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < \alpha < e$$

<u>Esercizio 4.</u> Si provi per induzione che, considerata $s_n := \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$, vale:

$$s_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}.$$

Base induttiva per $n = 0$ $s_1 = 1 \geqslant 1$. OK.
Passo induttivo:

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \overbrace{\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots \frac{1}{2^{n+1}}}^{2^n elementi} \geqslant_{passo} 1 + \frac{n}{2} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

<u>Esercizio 5.</u> Dedurre dall'esercizio precedente il comportamento della serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ e usare questo risultato per studiare il comportamento delle seguenti serie:

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Quindi per il criterio del confronto la serie diverge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{n+3}{n}\right)^{5n}}{n}$$

Per n grandi $\left(\frac{n+3}{n}\right)^{5n}$ si comporta come e^{15} e $\frac{e^{15}}{n} \geqslant \frac{1}{n} \quad \forall n$. Dunque per confronto con la serie armonica, la serie diverge.

<u>Esercizio 6.</u> Per definizione una serie $S_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ si dice telescopica se $a_k = A_{k+1} - A_k$. Le sue somme parziali si possono scrivere come:

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} A_{k+1} - A_k = A_{N+1} - A_1$$

Osservando che $S_N \to_N S_k$, si calcoli esplicitamente il valore delle seguenti serie:

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right):$$

$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1} \to_N 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \log(n+1) - \log(n):$$

$$S_N = \log(N+1) - \log(1) = \log(N+1) \to_N +\infty.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = +\infty.$$

<u>ESERCIZIO 7.</u> Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita induttivamente da

$$a_0 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

(i) Provare che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata da 2.
Per induzione su n, $a_0 = \sqrt{2} \leq 2$; ora facciamo il passo: $a_{n+1} \leq \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$.
(ii) Studiare il limite della successione.
È evidente che la successione è crescente, dunque, essendo anche superiormente limitata, ammette limite in $\mathbb{R}$. Passiamo al limite su n in $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ e avremo $l = \sqrt{2 + l}$ cioè $l^2 = 2 + l$ da cui $l^2 - l - 2 = 0$ e $l = \frac{1 \pm 3}{2}$. Essendo tutti i termini della successione positivi, deve risultare $l \geq 0$ e dunque $l = 2$.